第28卷 第1期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 28 No. 1
2011年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2011

文章编号:1005-3085(2011)01-0081-06

一类捕食-食饵模型分岐解的局部稳定性和全局分歧*

任翠萍[1]，　李艳玲[2]

(1- 西安欧亚学院基础部，西安　710065；　2- 陕西师范大学数学与信息科学学院，西安　710062)

摘　要: 本文利用局部分歧理论和局部稳定性理论，讨论了一类具有避难所的两物种间的捕食-食饵模型在非齐次 Dirichlet 边界条件下分歧解的性质，其功能反应函数为 Holling II 型．利用局部分歧和局部稳定性理论给出了分歧解局部稳定的条件；同时利用度理论得到了局部分歧可以延拓到整体分歧的结论．

关键词: 捕食-食饵模型；Holling II型；全局分歧；避难所；稳定性

分类号: AMS(2000) 35K57　　**中图分类号**: O175.26　　**文献标识码**: A

1　引言

本文所研究的问题是在物种密度空间分布不均匀的情况下，在非齐次 Direchlet 边界条件下具有常比率避难所且功能反应函数为 Holling II 型的 Lotka-Volterra 捕食-食饵模型，即

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}-d_1\Delta u=\alpha u(1-\frac{u}{k})-\frac{\beta muv}{1+amu}, & x\in\Omega,\quad t>0,\\ \frac{\partial v}{\partial t}-d_2\Delta v=-rv+\frac{c\beta muv}{1+amu}, & x\in\Omega,\quad t>0,\\ u=u_*,\quad v=v_*, & x\in\partial\Omega,\quad t>0,\\ u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$$u_*=\frac{r}{m(c\beta-ar)},\quad v_*=\frac{\alpha c}{k}\Big[\frac{km(c\beta-ar)-r}{(m(c\beta-ar))^2}\Big], \tag{2}$$

其中 Ω 是 R_+^2 中的一个固定且具有光滑边界的有界区域，参数 α, β, k, r, a, c 都为正常数．$m\in(0,1]$ 也为常数，模型 (1) 的生物背景和各参数的生物意义可参见文献 [1]．本文将给出 (1) 分歧解的局部稳定性及整体分歧，所采用的方法是分歧理论和稳定性理论．为保证 $u_*>0$ 及符合实际意义，需满足以下条件

$$\frac{r}{k(c\beta-ar)}<m\leq 1,\quad c\beta>ar. \tag{3}$$

2　准备知识

引理 1[2]　设 X, Y 为 Banach 空间，$U=S\times V$ 为 $R\times X$ 中的开集，$f\in C^2(U,Y)$，且 $f(\lambda,0)=0$，又 $L_0=D_2f(\lambda_0,0)$, $L_1=D_1D_2f(\lambda_0,0)$ 满足以下条件：

1)　$\dim N(L_0)=1$，且 $N(L_0)=\mathrm{span}\{u_0\}$；

收稿日期: 2008-08-07.　**作者简介**: 任翠萍 (1983年10月生)，女，硕士．研究方向：微分方程及其计算．

*__基金项目__: 国家自然科学基金 (10571115).

2) $\mathrm{codim}R(L_0)=1$; 3) $L_1u_0\notin R(L_0)$;
则存在 $\delta>0$ 和 C^1 连续曲线 $(\lambda,\phi):(-\delta,\delta)\to R\times Z$，使得对任意 $|s|<\delta$，$f(\lambda(s),s(u_0+\phi(s)))=0$ 成立，且 $\lambda(0)=\lambda_0$，$\phi(0)=\phi_0$.

引理 2[3] 若存在 $\epsilon>0$，使得对任意 $0<|a-a_0|<\epsilon$，$I-L(a)$ 可逆，且 $\mathrm{index}(T(a,\cdot),0)$ 在 $(a_0-\epsilon,a_0)$ 和 $(a_0,a_0+\epsilon)$ 上均为常数，但

$$\mathrm{index}\ \big(T(a_1,\cdot),0\big)\neq\ \mathrm{index}\ \big(T(a_2,\cdot),0\big),$$

其中 $a_0-\epsilon<a_1<a_0<a_2<a_0+\epsilon$，则在 $a-u$ 平面内存在连续分支 C 使得其上每一点满足 $u=T(a,u)$，且以下结论有且仅有一个成立：

1) C 由 $(a_0,0)$ 延伸到 $(\hat{a},0)$，这里 $I-L(\hat{a})$ 不可逆，且 $\hat{a}\neq a_0$；

2) C 在 $R\times X$ 内从 $(a_0,0)$ 延伸到无穷.

引理 3[4] 设 μ_0 为 L_0 的 K-单重特征值，相应的特征函数为 u_0，则存在 $\rho>0$ 使得当 $\|L-L_0\|<\rho$ 时，L 存在唯一的 K-单重特征值 $\eta(L)$，其相应的特征函数为 $\omega(L)=u_0+Z(L)$.

注 若引理 1 的假设成立，$X\subset Y$，包含映射 $i:X\to Y$ 连续，且 0 是 $L_0=D_2f(\lambda_0,0)$ 的 i-单重特征值，则存在分别定义在 λ_0 和 0 的邻域内的函数

$$\lambda\to\big(\gamma(\lambda),v(\lambda)\big)\subset R\times X,\quad s\to\big(\eta(s),\omega(s)\big)\subset R\times X,$$

使得

$$\big(\gamma(\lambda_0),v(\lambda_0)\big)=(0,u_0)=(\eta(0),\omega(0)),\quad v(\lambda)-u_0\in Z,\quad \omega(s)-u_0\in Z,$$

且

$$D_2f(\lambda,0)v(\lambda)=\gamma(\lambda)v(\lambda),\quad |\lambda-\lambda_0|\ll 1,\quad D_2f\big(\lambda(s),u(s)\big)\omega(s)=\eta(s)\omega(s),\quad |s|\ll 1.$$

引理 4[2,4] 若引理 1 的假设成立，$\gamma(\lambda)$, $\eta(s)$ 由注给出，则 $\gamma'(\lambda_0)\neq 0$，又若 $\eta(s)\neq 0(|s|\ll 1)$，则

$$\lim_{s\to 0}\frac{s\lambda'(s)\gamma'(\lambda_0)}{\eta(s)}=-1.$$

3 分歧解的局部稳定性及全局分歧

考察以下椭圆方程组

$$\begin{cases}-d_1\Delta u=\alpha u(1-\frac{u}{k})-\frac{\beta muv}{1+amu}, & x\in\Omega,\\ -d_2\Delta v=-rv+\frac{c\beta muv}{1+amu}, & x\in\Omega,\\ u=u_*,\quad v=v_*, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4}$$

其中 (u_*,v_*) 为 (4) 的定常解. 本文在一维情况及 (3) 成立的前提下考察系统 (4). 令

$$f(u,v)=\alpha u\Big(1-\frac{u}{k}\Big)-\frac{\beta muv}{1+amu},\quad g(u,v)=-rv+\frac{c\beta muv}{1+amu}.\tag{5}$$

同时，令 $\bar{u}=u-u_*$，$\bar{v}=v-v_*$，其中 $\bar{u}\ll u_*$，$\bar{v}\ll v_*$. 系统 (4) 变为

$$\begin{cases}-d_1\bar{u}''=f_0\bar{u}+f_1\bar{v}+f_2(\bar{u},\bar{v}), & x\in\Omega,\\ -d_2\bar{v}''=g_0\bar{u}+g_1\bar{v}+g_2(\bar{u},\bar{v}), & x\in\Omega,\\ \bar{u}=0,\quad \bar{v}=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{6}$$

其中

$$f_0 = \frac{\alpha}{c\beta}\Big(ar - \frac{c\beta + ar}{k}u_*\Big), \quad f_1 = -\frac{\beta m u_*}{1 + amu_*} < 0, \tag{7}$$

$$g_0 = \frac{c\beta m v_*}{(1 + amu_*)^2} > 0, \quad g_1 = 0. \tag{8}$$

$f_2(\bar{u},\bar{v})$, $g_2(\bar{u},\bar{v})$ 是 $(\bar{u},\bar{v})$ 的高阶导数部分．为了讨论方便，我们以下将平移后的 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 仍记为 u, v．令

$$Y = L^2(0,l) \times L^2(0,l), \quad E = \big\{(u,v) : u,\, v \in C^2(0,l),\, u(x) = v(x) = 0,\, x = 0,l\big\},$$

则在 C^2 范数意义下 E 是Banach空间，定义 $F : (0,\infty) \times E \to Y$ 为

$$F(d_2,U) = \big(d_1 u'' + f_0 u + f_1 v + f_2(u,v),\, d_2 v'' + g_0 u + g_2(u,v)\big), \quad U = (u,v).$$

对任意的 d_2 都有 $F(d_2,(0,0)) = 0$ 成立．定义 i_α 为满足 $d_1\lambda_i < f_0$, $i \le i_\alpha$ 的最大正整数，则 $0 < i_\alpha < \infty$．并令

$$d_2^{(k)} = \min_{0<i\le i_\alpha} d_2^{(i)}, \quad (0 < k \le i_\alpha), \quad d_2^{(i)} = \frac{f_1 g_0}{(d_1\lambda_i - f_0)\lambda_i}.$$

以下将 d_2 作为分歧参数，其他参数固定．

定理1　假设 $ar < c\beta$，并设 j 是满足 $d_1\lambda_j < f_0$ 的正整数，且对任意的正整数 k，若 $k \ne j$ 时，$d_2^{(k)} \ne d_2^{(j)}$，则 $(d_2^{(j)},(0,0))$ 是分歧点，且存在 $\delta > 0$ 和一个 C^1 函数类 $(d_2,(\phi(s),\psi(s))) : (-\delta,\delta) \to R \times Z$，使得

$$d_2(0) = d_2^{(j)}, \quad \phi(0) = \psi(0) = 0,$$

当 $|s| < \delta$ 时

$$F\big(d_2(s),(u(s),v(s))\big) = 0$$

成立，其中

$$u(s) = s\big(\phi_j + \phi(s)\big), \quad v(s) = s\big(b_j\phi_j + \psi(s)\big), \quad b_j = \frac{(d_1\lambda_j - f_0)}{f_1} > 0.$$

在定理1的条件下记 $L_0(d_2^{(j)},(0,0)) = D_2F(d_2^{(j)},(0,0))$，则有以下结论成立．

定理2　当 $j \ne k$ 时，$L_0(d_2^{(j)},(0,0))$ 存在实部大于0的特征值 $\bar{\mu}_0$，若对任意正整数 i, $\bar{\mu}_0$ 满足以下条件

$$(d_1 + d_2^{(j)})(\lambda_k - \lambda_i)\bar{\mu}_0 + \lambda_k(f_0 - d_1\lambda_k)(d_2^{(k)} - d_2^{(j)}) - \lambda_i(f_0 - d_1\lambda_i)(d_2^{(i)} - d_2^{(j)}) \ne 0,$$

$$1 + (d_1\lambda_k - f_0 - \bar{\mu}_0^2)/f_1 g_0 \ne 0,$$

则 $\bar{\mu}_0$ 是 $L_0(d_2^{(j)},(0,0))$ 的 i-单重特征值．

定理3　当 $j = k$ 时，若

$$d_1\lambda_1 - f_0 + \frac{f_1 g_0 \lambda_1}{(d_1\lambda_k - f_0)\lambda_k} > 0$$

成立. 此时 0 是 $L_0(d_2^{(j)},(0,0))$ 实部最大的特征值，其他特征值均在左半复平面. 若

$$1+\frac{(d_1\lambda_k-f_0)^2}{f_1g_0}\neq 0,$$

则 0 是 $L_0(d_2^{(j)},(0,0))$ 的 i-单重特征值. λ_1 为 $-\Delta$ 在第一边界条件下的第一特征值.

证明 设 μ 是 $L_0(d_2^{(j)},(0,0))$ 的特征值，相应的特征函数为 $(\phi(x),\psi(x))$，则有

$$\big(d_1\Delta\phi+(f_0-\mu)\phi+f_1\psi,\ d_2\Delta\psi+g_0\phi-\mu\psi\big)=(0,0).$$

将 ϕ, ψ 在 L^2 的一组基底下展开有

$$\phi=\sum_{0<i<\infty}a_i\phi_i,\quad \psi=\sum_{0<i<\infty}b_i\phi_i,$$

则有

$$\sum_{0<i<\infty}B_i\begin{pmatrix}a_i\\ b_i\end{pmatrix}\phi_i=0,\quad B_i=\begin{pmatrix}f_0-d_1\lambda_i-\mu & f_1\\ g_0 & -d_2\lambda_i-\mu\end{pmatrix}.$$

可见，若 μ 是 L 的特征值，当且仅当对某些 $i>0$，系数矩阵退化，即得

$$\mu^2+P_i(d_2^{(j)})\mu+Q_i(d_2^{(j)})=0, \tag{9}$$

其中

$$P_i(d_2^{(j)})=(d_1+d_2^{(j)})\lambda_i-f_0,\quad Q_i(d_2^{(j)})=\lambda_i(f_0-d_1\lambda_i)(d_2^{(i)}-d_2^{(j)}).$$

当 $j=k$ 时，若 $i=k$，则

$$Q_k(d_2^{(k)})=\lambda_k(f_0-d_1\lambda_k)(d_2^{(k)}-d_2^{(k)})=0.$$

由

$$d_1\lambda_1-f_0+\frac{f_1g_0\lambda_1}{(d_1\lambda_k-f_0)\lambda_k}>0$$

和 λ_i 的单调性必有

$$d_1\lambda_k-f_0+\frac{f_1g_0}{d_1\lambda_k-f_0}>0.$$

从而

$$P_k(d_2^{(k)})=(d_1+d_2^{(k)})\lambda_k-f_0>0.$$

设 (9) 的根分别为 μ_1, μ_2，则易得 $\mu_1=0$, $\mu_2<0$；若 $i\neq k$，此时无论 i 取什么值都有

$$Q_i(d_2^{(k)})=\lambda_i(f_0-d_1\lambda_i)(d_2^{(i)}-d_2^{(k)})>0,$$

同理易得

$$P_i(d_2^{(k)})=(d_1+d_2^{(k)})\lambda_i-f_0>0\ \ (i>0).$$

根据根与系数的关系得 (9) 的根实部均小于 0.

综上所述得此时 0 是 $L_0(d_2^{(j)},(0,0))$ 实部最大的特征值. 易验证若

$$1+\frac{(d_1\lambda_k-f_0)^2}{f_1g_0}\neq 0,$$

则 0 是 $L_0(d_2^{(j)},(0,0))$ 的 i-单重特征值. **证毕**

定理 4 对于 $(d_2^{(k)},(0,0))$ 之外的其他分歧点 $(d_2^{(j)},(0,0))$ $(1\le j\le i_\alpha,\ j\ne k)$，由算子单重特征值的扰动性定理可知，算子

$$D_2F\big(d_2(s),(u(s),v(s))\big),\quad \big(|s|\ll 1,\ |d_2(s)-d_2^{(j)}|\ll 1\big).$$

也有实部大于零的特征值，故由这些分歧点产生的局部分歧解是不稳定的.

定理 5 存在一个 C^1 函数：$d_2\to(\gamma(d_2),U(d_2))$ 和 $s\to(\mu(s),V(s))$，分别从 $d_2^{(j)}$ 和 0 的邻域到 $R\times X$ 映射，使得

$$\big(\gamma(d_2^{(j)}),\,U(d_2^{(j)})\big)=\big(0,\,(\phi_j,\,b_j\phi_j)\big)=\big(\mu(0),\,V(0)\big),$$

且

$$\begin{aligned}&L\big(d_2,(0,0)\big)U(d_2)=\gamma(d_2)U(d_2),\quad |d_2-d_2^{(j)}|\ll 1,\\&L\big(d_2(s),(u(s),v(s))\big)V(s)=\mu(s)V(s),\quad |s|\ll 1,\end{aligned}\tag{10}$$

其中

$$U(d_2)=\big(u_1(d_2),\,u_2(d_2)\big),\quad V(s)=\big(v_1(s),\,v_2(s)\big),$$

且 $\gamma'(d_2^{(j)})\ne 0$，$\mu(s)$ 和 $-sd_2'(s)\gamma'(d_2^{(j)})$ 关于零点同阶无穷小，当 $\mu(s)\ne 0$ 时，两者同号.

定理 6 $\gamma'(d_2^{(k)})>0$.

定理 7 $d_2(s)$ 在 $s=0$ 处的导数满足

$$\begin{aligned}&d_2'(0)\int k\beta mb_k\lambda_k\phi_k^2\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\alpha\big[km(c\beta-ar)-r\big](c\beta-ar)}{k(d_1\lambda_k-f_0)c^2\beta^2}\big[(\alpha kam-\alpha-k\beta mb_k)(c\beta-ar)-3a\alpha r-\alpha a^2mr\big]\phi_k^3\mathrm{d}x\\&\quad+\int\frac{c\beta-ar}{c\beta}\big[k\beta m^2b_k(c\beta-ar)-\alpha am(km(c\beta-ar)-r)\big]\phi_k^3\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{11}$$

记 (11) 右端为 I.

定理 8 对于 $(d_2^{(k)},(0,0))$ 处产生的分歧解，若

$$d_1\lambda_1-f_0+\frac{f_1g_0\lambda_1}{(d_1\lambda_k-f_0)\lambda_k}>0,$$

且 k 为奇数，当 $I>0$ 时，$0<s<\delta$，分歧解稳定；$-\delta<s<0$，分歧解不稳定. 当 $I<0$ 时，$0<s<\delta$，分歧解不稳定；$-\delta<s<0$，分歧解稳定.

定理 9 在定理 1 的假设下，由 $(d_2^{(j)},(0,0))$ 产生的局部分歧可以延拓成整体分歧.

参考文献：

[1] Ko W, Ryu K. Qualitative analysis of a predator-prey model with Holling type II functional response incorporating a prey refuge[J]. Journal of Differential Equations, 2006, 231: 534-550

[2] Smoller J. Shock Waves and Reaction Diffusion Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983

[3] Ni W M. Turing patterns in the Lengyel-Epstein system for the CIMA reaction[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2005, 10: 3953-3969
[4] Crandall M G, Ranbinomitz P H. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1973, 52(2): 161-180

The Local Stability of Bifurcation Solutions and Global Bifurcation for a Predator-prey System

REN Cui-ping[1], LI Yan-ling[2]

(1- Department of Basic Courses, Xi'an Eurasia University, Xi'an 710065;
2- College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: Discussed in this paper are the properties of the bifurcation solutions for a kind of predator-prey model between two species with the Holling type II functional response, which incorporates a prey refuge under the inhomogeneous Dirichlet boundary conditions. By employing the local bifurcation theory and local stability theory, the condition for the local stability of bifurcation solutions to this system is derived. In addition, the conclusion that a local bifurcation can be extended to a global bifurcation is obtained by virtue of the degree theory.

Keywords: predator-prey model; Holling type II; global bifurcation; prey refuge; stability

Received: 07 Aug 2008. **Accepted:** 21 Jan 2010.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10571115).